

NOTAS SOBRE UN MODELO GROSERO PARA LA “CURVA DE INFECTADOS” DE COVID 19

Javier Villarroel

Abstract. Se pretende desarrollar modelos lineales sencillos para la descripción de la “curva de infectados” por una epidemia (Covid 19 u otras) y describir los regímenes principales hacia los que puede evolucionar; se definen también los observables básicos, como crecimientos diarios o tiempos de doblaje y sus tasas de crecimiento. Estos modelos permiten capturar y clasificar el comportamiento de epidemias en sus etapas iniciales de desarrollo.

Dado que se ha producido una epidemia sea $x(t)$ el número de contagios a tiempo t a partir del instante del primer contagio; si elegimos éste como inicio de la escala de tiempos: $t = 0$, tenemos que $x(0) = 1$. Razonando que el incremento de contagios en $(t, t + h)$ es proporcional a los existentes y también a la duración del intervalo de tiempos pasado h tendremos $x(t + h) = x(t) + rx(t)h + O(h^2)$, donde r es la tasa de contagio por día o unidad de tiempo. Tal ecuación es una buena aproximación en tiempos pequeños, al *principio (onset)* de la pandemia. Admitimos la posibilidad que la tasa de contagios por día varíe con t . Otros modelos más complejos, como el modelo de compartimentos SIR y SEIR tienen en cuenta que las personas curadas o muertas, etc ya no son transmisores; o admiten variaciones aleatorias. Aquí no hacemos ésto pues *al principio* de la pandemia la consideración anterior bastaría. Por paso al límite se obtiene el modelo clásico que describe crecimiento de poblaciones mediante una ecuación lineal (modelo de crecimiento Malthusiano)

$$\frac{dx}{dt} = rx(t), x(0) = 1 \quad (1)$$

donde $r(t)$ es la tasa (variable) de contagios en el día t . La solución es

$$x(t) = e^{\int_0^t r(s)ds} \quad (2)$$

Para comparar mejor con los datos empíricos y evitar manejarse con crecimientos exponenciales se acostumbra a pasar a una *escala logarítmica*, o lo que es equivalente, estudiar y frente a t donde $y := \log x$:

$$y(t) = \int_0^t r(s)ds$$

Si queremos tener esperanza de controlar la pandemia r debe ser una función decreciente.

En particular si $r(t) = r_0$ constante la solución muestra el famoso *crecimiento exponencial*, mientras que la transformación logarítmica nos da una *recta de pendiente* r_0

$$x(t) = e^{r_0 t}; \quad y(t) = r_0 t \quad (3)$$

Al principio del brote muchos países ven cómo los fallecidos (y los casos confirmados) crecen de forma exponencial. Es fácil observarlo en el gráfico logarítmico, porque en ese caso la línea del país sigue una trayectoria recta: la pendiente de esa recta marca el ritmo del crecimiento e informa de con qué velocidad se duplican los casos (cada dos, cuatro o seis días). En España, al principio los fallecidos se duplicaban muy deprisa, pero a partir de la segunda semana su curva comenzó a aplanarse. El objetivo es lograr que se aplane un poco más cada día.

Evolución de fallecidos en [España](#), [Italia](#), [Corea del Sur](#), [EE UU](#), [R. Unido](#) y [Alemania](#).

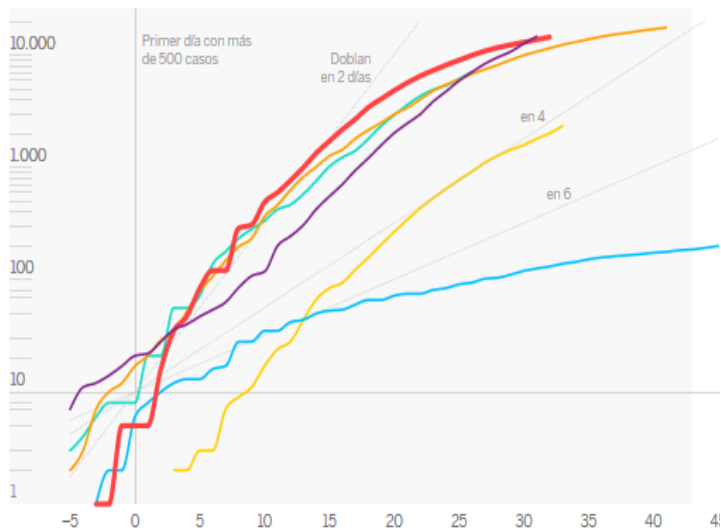


Figure 1: Gráfica con datos reales en escala logarítmica de diversos países (Fuente “El País”): En rojo España, por debajo Italia, para los cuales la aproximación por una recta es relativamente aceptable, no así para la curva que se aplanan (Corea del Sur). A día de hoy-6 Abril-España podría encontrarse en régimen sub-exponencial con $y(t) = \sqrt{t/2}$ o de potencias mientras que Corea del Sur correspondería a una $r(t) \in L^1$, como la del ejemplo 4.

Sin embargo en la gráfica de datos reales vemos una evolución dada sólo localmente por una recta, *pero no globalmente* (ver figuras 1 y 2). Por tanto la ecuación $y(t) = r_0 t$ no describe bien la situación. La razón está en que el confinamiento y mayor cautela de la población induce disminución de la tasa de contagios diaria.

Es sencillo demostrar que

Proposition 1. sea $\ell := \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$. Se verifica que

1. (i) Si $\ell = \infty$ la epidemia *se acelera* (crecimiento super-exponencial);
2. Si $\ell > 0$ la epidemia se mantiene exponencialmente;
3. Si $\ell = 0$ el crecimiento de $x(t)$ es en general más lento que el exponencial, pudiendo estar en alguno de los dominios de atracción (de Jovan Karamata)
 - (a) subexponencial: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\alpha t} = 0, \forall \alpha > 0$.
 - (b) función de variación regular: crece con una ley de potencias en el ∞ : $x(t) = O(t^\rho)$ cuando $t \rightarrow \infty$ para algún $\rho > 0$.
 - (c) Extinguirse: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\infty < \infty$. La epidemia *se extingue* sii $r(t) \in L^1$ es una función integrable. En ese caso $x_\infty = e^{\Psi(\infty)}$ donde

$$\Psi(t) := \int_0^t r(s) ds, \quad (4)$$

0.0.1 Incremento diario

Un observable del máximo interés es el incremento de contagios diarios. Hay que notar que al ser un indicador muy centrado en días está sujeto a variaciones estadísticas importantes.

Podemos escribir

$$x_{t+1} - x_t = e^{\int_0^t r(s) ds} (e^{\int_t^{t+1} r(s) ds} - 1)$$

Para hacerse una idea del comportamineto podemos usar la siguientes aproximaciones válidas si $t \gg 1$,

$$x_{t+1} - x_t \approx r(t) e^{\int_0^t r(s) ds}$$

Para tasa constante entonces $x_{t+1} - x_t$ muestra también crecimiento exponencial

Si comparamos con los datos de la realidad (figura 4) vemos que un tal crecimiento se cumple bien en los primeros 25 días. A partir de este momento esta curva se aplana e incluso decrece, lo que indica que a día de hoy (4 Abril) ya *no estamos en el régimen exponencial*.

Veamos que comportamientos admite el modelo matemático con tasa de contagios diario variable. Es sencillo clasificar el comportamiento en términos del crecimiento en el ∞ de r .

Proposition 2. Supongamos que $r(t)$ es finita con $\ell := \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$ y que para t grande se verifica $r(t) \approx C/t^\rho$, es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\rho r(t) = C, 0 < C < \infty$ para ciertas constantes $\rho > 0, C$. Entonces

1. Si $\rho < 1$ la epidemia *se acelera* con incremento del número contagios diarios (crecimiento sub-exponencial del ejemplo 2).

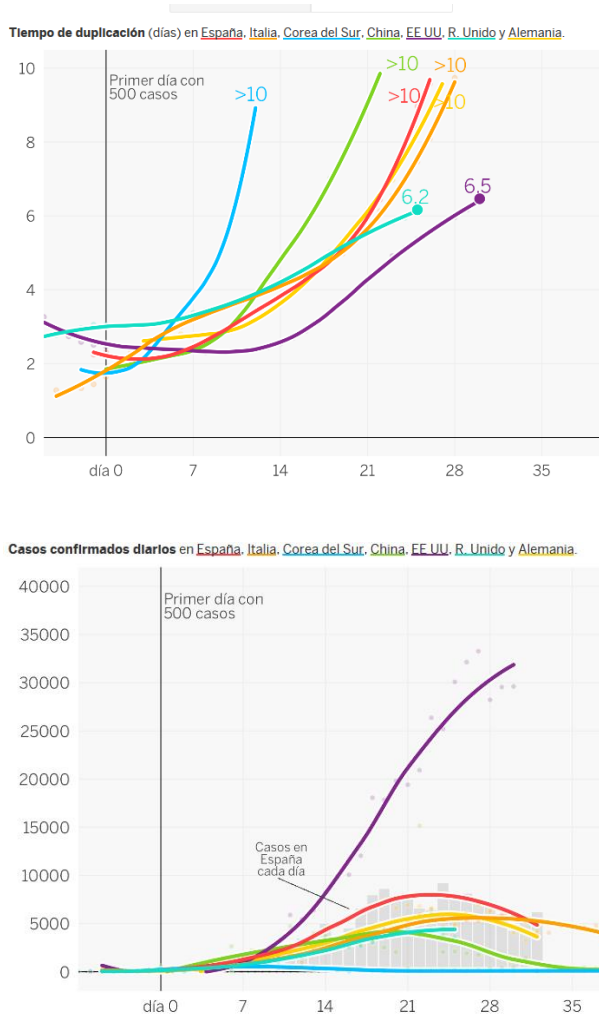
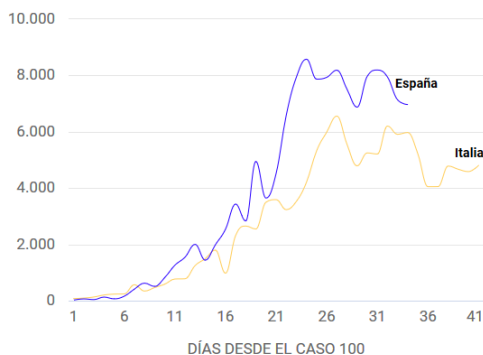


Figure 2: Gráfica número de contagios diarios en escala standard para España y otros países. Primero hay crecimiento exponencial, que se para a partir de día 25 para comenzar a disminuir. Se muestra también (arriba) la curva de tiempos de duplicación que para España para crecer quasi-linealmente como $\Phi(t) \approx (2/7)x$ (Fuente “El País”)

CÓMO ESTÁ EVOLUCIONANDO LA CURVA DE NUEVOS CASOS DIARIOS

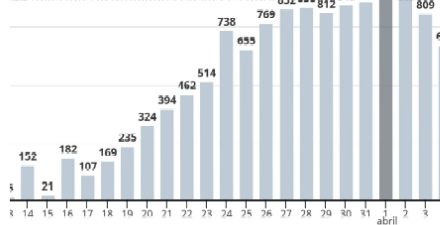
*Últimos datos oficiales: 04/04/2020



Gracias Ministerio de Sanidad

Muertes por coronavirus en España cada día

155 fallecidos acumulados hasta el 5 abril



Ministerio de Sanidad

Figure 3: Gráfica número de contagios diarios en escala standard para España e Italia. Primero hay crecimiento exponencial, que se para a partir de día 25 para comenzar a disminuir.

2. Si $\rho = 1$ el número de contagios diarios puede crecer o disminuir a cero (ejemplo 3).
3. Si $\rho > 1$ (lo que equivale esencialmente a $r(t) \in L^1$ integrable, ej. 4) el número de contagios diarios disminuye a cero con una ley de potencias de exponente ρ :

$$x(t+1) - x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} O(1/t^\rho)$$

0.0.2 Tiempos de duplicación

Otra cuestión del máximo interés es el tiempo de duplicación. Supongamos que a tiempo t_1 se mide que $x(t_1) := x_1$. Interesa determinar el primer instante t_2 para el cual se dobla la tasa de contagios, que debe satisfacer

$$x(t_2) := 2x_1 \Leftrightarrow \int_0^{t_2} r(s)ds = \log 2 + \int_0^{t_1} r(s)ds \Leftrightarrow$$

$$t_2 = \Psi^{-1}\left(\log 2 + \Psi(t_1)\right) \quad \text{donde } \Psi(t) := \int_0^t r(s)ds$$

Por tanto tenemos que dado un instante t_1 el tiempo restante τ para que se doble la tasa de contagios es $\Phi(t_1)$ siendo

$$t \mapsto \Phi(t) := \Psi^{-1}\left(\log 2 + \Psi(t)\right) - t \quad (5)$$

que puede no ser creciente!! Cuanto más creciente sea Φ más se contiene la pandemia.

Para el caso de tasa $r(t) = r_0$ constante el *intervalo intrateporal* para el cual se dobla la tasa de contagios es también constante

$$\tau := (t_2 - t_1) = (1/r) \log 2$$

. Para España aproximadamente $r = 0.1$, $\tau = 3$ días.

Proposition 3. Supongamos que $r(t)$ es finita con $\ell := \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$. Tenemos

1. Si $r(t) \notin L^1$ entonces $\Phi(t) < \infty$ para todo t y $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$. La epidemia crece subexponencialmente o como ley de potencia; además el tiempo restante τ para que se doble la tasa de contagios $\Phi(t_1)$ aumenta pero no llega a ser ∞ .
2. Supongamos $r(t) \in L^1$ Definamos *el tiempo de explosión* t^* como

$$\Psi^{-1}\left(\log 2 + \Psi(t^*)\right) = \infty \Leftrightarrow t^* := \Psi^{-1}\left(\Psi(\infty) - \log 2\right) \quad (6)$$

La epidemia se extingue en t^* en el sentido que a partir de aquí el tiempo de doblaje de contagios deviene ∞ .

El siguiente resultado recoge las características del régimen óptimo

Proposition 4. Supongamos que $r(t)$ es finita y que para t es grande se verifica $r(t) \approx C/t^\rho$, $\rho > 1$. Entonces

1. el número de contagios diarios disminuye a cero como $1/t^\rho$.
2. La epidemia se extingue en *el tiempo de explosión* (6).

0.0.3 Varios Ejemplos

. Los ejemplos contemplan decrecimiento de menor a mayor. Aquí $r_0 := r(0)$ y λ son constantes.

1. Dominio exponencial: crecimiento total y el diario son ambos exponenciales:

$$r(t) = r_0 \Rightarrow x(t) = e^{r_0 t}, \quad x(t+1) - x(t) = (e^{r_0} - 1)e^{r_0 t}$$

Finalmente el tiempo de doblaje es constante

$$\tau \equiv \Phi(t) = (1/r_0) \log 2$$

2. Dominio sub-exponencial $r(t) = r_0/\sqrt{t+1} \Rightarrow$

$$x(t) = e^{2r_0\sqrt{t+1}}, \quad x(t) - x(t-1) = e^{2r_0\sqrt{t}}(e^{2r_0(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})} - 1)$$

Por desarrollo en serie obtenemos, cuando t es grande

$$x(t) - x(t-1) \approx \frac{r_0}{\sqrt{t}} e^{2r_0\sqrt{t+1}} \rightarrow \infty$$

En caso 2 (y también 3) la epidemia sigue creciendo pero de forma más lenta que el primero (ver figura 4). El incremento diario tiene un ritmo de crecimiento solo algo más lento que el global.

El tiempo de doblaje aumenta como $t^{1/2} \approx 1/r(t)$ pero nunca se hace ∞

$$\tau \equiv \Phi(t) = (\log 2/r_0)(\sqrt{t} + (1/4r_0) \log 2)$$

3. Función de variación regular: $r(t) = r_0/(1 + \lambda t)$

$$\Rightarrow x(t) = (1 + \lambda t)^{(r_0/\lambda)}, \quad x(t+1) - x(t) = (1 + \lambda(t+1))^{(r_0/\lambda)} - (1 + \lambda t)^{(r_0/\lambda)}$$

Por desarrollo en serie obtenemos, cuando t es grande

$$x(t+1) - x(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} r_0(1 + \lambda t)^{(r_0/\lambda)-1} \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} \begin{cases} \infty, r_0 > \lambda, \\ \lambda, r_0 = \lambda \\ 0, r_0 < \lambda \end{cases}$$

La epidemia sigue creciendo pero de manera *mucho* más lenta que el primero (ver figura 4). Además si $r_0 < \lambda$ los casos diarios *decrecen* de forma suave: $x(t+1) - x(t) \approx C/t^\rho$ con $\rho := 1 - (r_0/\lambda) < 1$ (figura 5).

Tiempo de doblaje crece de manera suave (lineal) con pendiente $<, =$ ó > 1 para $r_0 >, =, < \lambda$

$$\tau \equiv \Phi(t) = (2^{(\lambda/r_0)} - 1)t + 2^{(\lambda/r_0)}/\lambda$$

Table 1: La tabla resume los comportamientos y regímenes principales, así como las tasas de crecimiento de los principales observables. Usamos $\eta := r_0/\lambda$

$r(t)$	$x(t)$	Crecimiento	$x(t+1) - x(t)$	$\Phi(t)$ ec. (5)
r_0	$e^{r_0 t} \rightarrow \infty$	exponencial	$(e^{r_0} - 1)e^{r_0 t} \rightarrow \infty$	$\log 2/r_0$
$\frac{r_0}{\sqrt{t+1}}$	$e^{2r_0 \sqrt{t}} \rightarrow \infty$	sub-exp.	$\frac{r_0}{\sqrt{t}} e^{2r_0 \sqrt{t}} \rightarrow \infty$	$(\log 2/r_0)\sqrt{t}$
$\frac{r_0}{1+\lambda t}$	$(1 + \lambda t)^\eta \rightarrow \infty$	Power law	$r_0(1 + \lambda t)^{\eta-1} \rightarrow \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$	$(2^\eta - 1)t$
$\frac{r_0}{1+\lambda^2 t^2}$	$e^{\eta \arctan \lambda t} \rightarrow c$	Acotado	$\frac{c}{t^2} \rightarrow 0$	$\frac{A}{1-A\lambda t}$

4. $r(t) = r_0/(1 + \lambda^2 t^2) \in L^1$ caso integrable. En este caso

$$y(t) = (r_0/\lambda) \arctan(\lambda t); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \pi r_0/(2\lambda)$$

El número de contagiados dejará de crecer y se aproxima a una constante.

$$x(t+1) - x(t) \approx r_0/(1 + \lambda^2 t^2)^{-1} e^{(r_0/\lambda) \arctan(\lambda t)}$$

Los casos diarios *decrecen* de forma más pronunciada (figura 5)

$$x(t+1) - x(t) \approx r(t) = O(1/t^2) \in L^1$$

El tiempo de doblaje lo obte nemos imponiendo

$$\arctan(\lambda t_2) = \arctan(\lambda t_1) + (\lambda/r_0) \log 2$$

Si $A := \tan((\lambda/r_0) \log 2)$. la fórmula de la la adición de la tangente da

$$t_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda t_1 + A}{1 - A\lambda t_1} \quad \text{y} \quad t_2 - t_1 = \frac{A}{\lambda} \frac{1 + \lambda t_1^2}{1 - A\lambda t_1}$$

$$t \mapsto \Phi(t) := \frac{A}{\lambda} \frac{1 + \lambda t^2}{1 - A\lambda t}$$

que “explota” (tiene una asíntota) en $t^* := \frac{1}{A\lambda}$, punto en el cual la pandemia se extinguiría. Por otro lado, (6) nos da el mismo resultado, pues

$$\Psi(t) = (r_0/\lambda) \arctan(\lambda t_2), \quad \Psi(\infty) = (r_0\pi)/(2\lambda);$$

$$t^* := \Psi^{-1}(\Psi(\infty) - \log 2) = (1/\lambda) \tan\left(\pi/2 - (\lambda/r_0) \log 2\right) = \frac{1}{A\lambda}$$

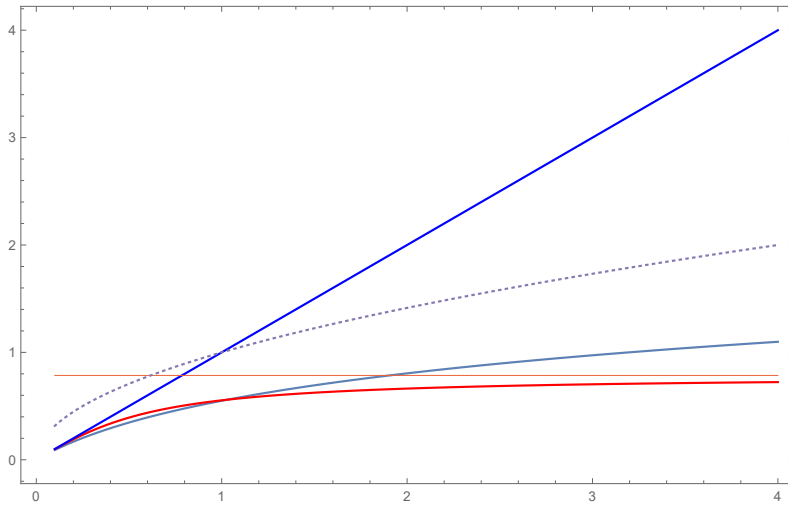


Figure 4: Gráfica crecimiento total de fallecidos en escala logarítmica $t \mapsto y(t)$ bajo los modelos anteriores: en azul caso 1 (exponencial), 2 punteado (sub-exponencial), 3 verde y 4 rojo; todos son crecientes no acotados salvo 4, el único que tiende a constante. Nótese el parecido de esta última curva con las de China y Corea del Sur de las figuras 1,2. España estaría posiblemente en un régimen intermedio cercano al sub-exponencial o el crecimiento como una potencia (variación regular).

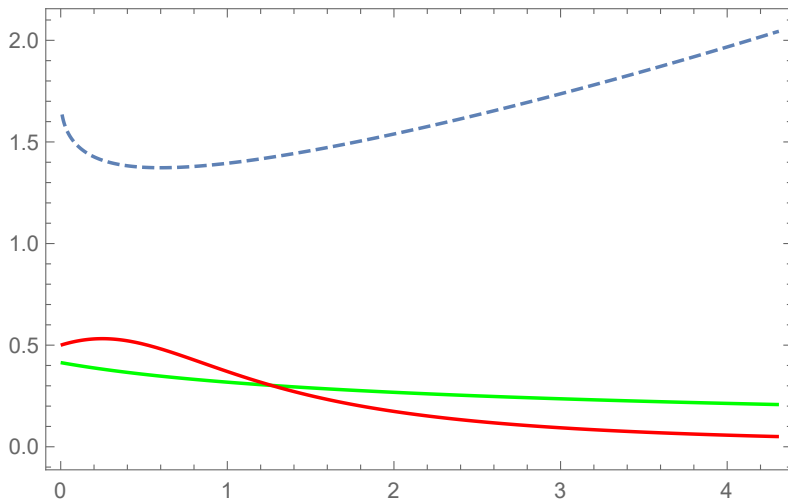


Figure 5: Curvas de contagios diarios en escala standard para los modelos 2, 3, 4 (azul, verde y rojo) con parámetros $r_0 = 0.4, \lambda = 1$. Como se ve estos dos últimos muestran disminución de contagios. .

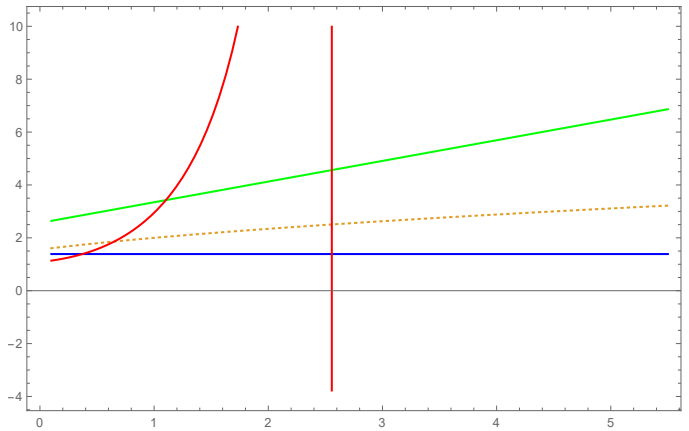


Figure 6: Tiempos de doblaje de la epidemia para los ejemplos 1,2,3 y 4. En el caso 1 es constante, en 2 tiene crecimiento como \sqrt{t} , lineal en 3 mientras que en 4 tiende a ∞ . Solo en el caso 4 la epidemia se para, concretamente en la asíntota $t \approx 2.5$. La situación de España es cercana al caso lineal.

0.0.4 Modelos más complejos deterministas y estocásticos

El modelo básico (con tasa constante o variable) puede ser mejorado considerando probabilidades de infección. En ese caso, $X(t)$: número de individuos contagiados en tiempo t , define un proceso estocástico de Markov que valora en los enteros (cadena en tiempo continuo). Las probabilidades de transición infinitesimales de la cadena para un tiempo t serán

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = x + 1 | X_t = x) = rxh + O(h^2) \quad (7)$$

siendo r tasa constante o variable de infección.

A partir de aquí es posible obtener las llamadas ecs. de Kolmogorov para las probabilidades marginales como $p_t(n) := \mathbb{P}(X_t = n)$, a saber

$$\frac{dp_t(n)}{dt} = rp_t(n) - rp_t(n-1), \quad n = 1, \dots, \infty$$

En particular el el número *medio* de individuos infectados para un tiempo t $x(t) := \mathbb{E}(X_t)$ satisface la ecuación logística $\frac{dx}{dt} = rx$.

Un modelo más fino y complejo es el modelo SIR de compartimentos de Kermack- McKendrick (1922) que diferencia entre número de individuos *susceptibles* (pero no infectados) y los ya infectados. Se plantea en términos de probabilidades de infección y recuperación. Llamando $S(t), X(t)$ a el número de individuos susceptibles y afectados estos definen un proceso estocástico de Markov en el plano, y que valora en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dado que un tiempo t el número de individuos susceptibles e infectados son $S_t = s, X_t = x$ y que un individuo que se infecta deja de ser susceptible, las probabilidades de transición de la cadena (S_t, X_t)

serán, en lugar de (7)

$$\mathbb{P}(S_{t+h} = s - 1, X_{t+h} = x + 1 | S_t = s, X_t = x) = \alpha x S h + O(h^2)$$

$$\mathbb{P}(S_{t+h} = s, X_{t+h} = x - 1 | S_t = s, X_t = x) = \beta x h + O(h^2), (s, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

siendo α y β parámetros que miden la tasa de transmisión y de curación. (Expresan que un individuo sano puede contagiarse; y que uno enfermo puede sanar). De aquí se siguen ecs. diferenciales para las probabilidades s de infectados/recuperados, es decir para probabilidades marginales como $p_t(n, m) := \mathbb{P}(S_t = m, X_t = n)$,

Si la población consta inicialmente de N individuos y el origen de la infección se toma en $t = 0$ el número *medio* de individuos susceptibles e infectados $x(t) := \mathbb{E}(X_t)$, $s(t) := \mathbb{E}(S_t)$ a tiempo t satisface, en particular, el sistema determinista de ecs. diferenciales ordinarias

$$\frac{ds}{dt} = -\alpha x s, \quad \frac{dx}{dt} = \alpha x s - \beta x$$

con condiciones iniciales

$$s(0) = N, x(0) = 1$$

Análisis de este sistema muestra que el comportamiento de las soluciones depende del parámetro número de reproducción básico $R_0 = (\alpha/\beta)s_0$; en función de que $R_0 > 1$, $= 1$ o < 1 tres escenarios diferentes aparecen, correspondiendo la extinción al caso $R_0 < 1$ mientras que $R_0 = 1$ da el valor crítico de propagación.

0.0.5 Conclusiones

Se consideran diversos modelos de propagación de la población de infectados $x(t)$ en la epidemia obtenidos a partir de una ecuación lineal con coeficientes variables para el crecimiento. Se observa que la ecuación $y(t) := \log x(t) = r_0 t$ no describe bien la situación. A día de hoy—6 Abril— España parece encontrarse en régimen sub-exponencial con $y(t) = \sqrt{t/2}$ ó o de crecimiento como una potencia (variación regular) mientras que Corea del Sur correspondería a una $r(t) \in L^1$.

Se comenta como interpretar matemáticamente las curvas de crecimiento diario y de tiempos de duplicación; para España esta última parece crecer quasi-linealmente con una ligera pendiente; concretamente como $\Phi(t) \approx (2/7)x$, correspondiente a una tasa de variación regular o “power law”: $x(t) = (1 + \lambda t)^{0.53}$.